

Физика

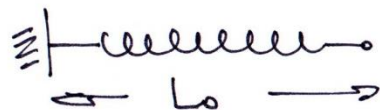
за софтверско инжењерство

Белешке са предавања 3

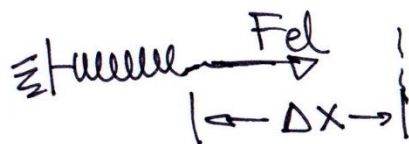
16. октобар 2019

"TOUR DE FORCE" (НАСТАВА)

□ ЕЛАСТИЧНА СИЛА ОПРЧГЕ



"ПРИРОВНА" ВУЖИНА
(НЕИСПЕГНУТА ОПРЧГА)



$$F_{el} = k \cdot \Delta x$$

k — КОЕФИЦИЈЕНТ
УПРЧТОСТИ
ОПРЧГЕ



МЕХАНИЧКИ РАД, СНАГА И ЕНЕРГИЈА

→ ОСНОВНЕ ДИНАМИЧКЕ
КАРАКТЕРИСТИКЕ КРЕТАЊА
МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

□ ТЕОРЕМА О ПРОМЕНИ
КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА
МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ :

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k \Rightarrow d\vec{p} = \sum_k \vec{F}_k \cdot dt \quad / \int$$

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt \Rightarrow$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k \cdot dt$$

ИМПУЛС
СИЛЕ

АКО НА ЧЕСТИЦУ
НЕ ДЕЛУЈУ СИЛЕ

КОЛИЧИНА КРЕТАЊА
СЕ ОДРЖАВА

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

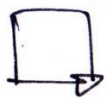
1. КОЛИЧИНА
КРЕТАЊА
(ЛИНЕАРНИ МОМЕНТ)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2. КИНЕТИЧКА
ЕНЕРГИЈА

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

→ ПОТПуне информације о кретању
ЗАХТЕВАЈУ ПОЗНАВАЊЕ ОБЕ ОБЕ
ВЕЛИЧИНЕ



РАД СИЛЕ : МЕРА АКЦИЈЕ СИЛЕ
НА ТЕЛО ЗА ДАТИ ПОМЕРАЈ

$$A [J] \quad 1J = 1N \cdot 1m$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos \alpha (\vec{F}, d\vec{r}) = F_{\tau} \cdot dr$$

$dA > 0 \rightarrow$ ТАНГЕНЦИЈАЛНА СИЛА
И ПОМЕРАЈ СУ ИСТО УСМЕРЕНИ
 \Rightarrow СИЛА УБРЗАВА ЧЕСТИЦУ

\hookrightarrow САМО ОНА КОМПОНЕНТА
СИЛЕ КОЈА УТИЧЕ
НА ПРОМЕНУ ИНТЕРЕС.
БРЗИНЕ ЈЕ ОД ИНТЕРЕСА

$dA < 0 \rightarrow$ \vec{F}_{τ} И $d\vec{r}$ СУ СПРОТНО
УСМЕРЕНИ
 \Rightarrow СИЛА УСПОРАВА КРЕТАЊЕ

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r}$$

: РАД ПРИ КОНАЧНОМ ПРЕМЕШТАЊУ
ИЗ ТАЧКЕ M_1 У M_2

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

\rightarrow ТЕОРЕМА О ПРОМЕНИ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ ЧЕСТИЦЕ :

НА ПРИМЕРУ
ПРАВОЛИНИЈСКОГ
КРЕТАЊА (1D)

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} m \cdot a \cdot dx = \int m \frac{dv}{dt} dx = \int m \frac{dx}{dt} dv = \int_{v_1}^{v_2} m v dv$$

$$A = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow \boxed{A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k}$$

☐ СИЛАТА $P [W]$ $1W = \frac{1J}{1s}$

→ БРЗИНА КОЈОМ СЕ ВРШИ РАД: $P_{SR} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$, $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$

$$P = \frac{d(F_{\tau} \cdot ds)}{dt} = F_{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = F_{\tau} \cdot v \Rightarrow \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

КОНЕРВИЈАЛНА ЈЕРМИЈА
ЗА ЕНЕРГИЈУ 1kWh

☐ ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА : ^{1.} ЕНЕРГИЈА ПОВЕЗАНА СА ПОЛОЖАЈЕМ ТЕЛА

→ СИЛЕ КОЈЕ СУ ПОВЕЗАНЕ
СА ИДЕЈОМ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ

→ КОНЗЕРВАТИВНЕ СИЛЕ

→ АКО ЈЕ ТОТАЛНА МЕХАНИЧКА
ЕНЕРГИЈА КОНСТАНТНА

→ $E = E_k + E_p = \text{const}$
КОНЗЕРВАТИВАН СИСТЕМ

2. ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА
СЕ ОДНОСИ НА МОГЉНОСТ
ДА СИЛА ИЗВРШИ РАД

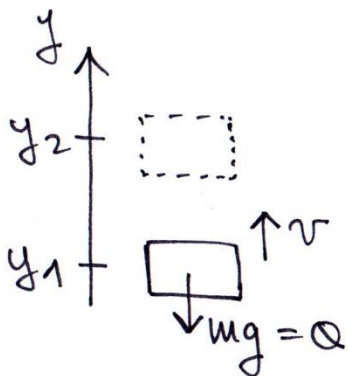
$$E_{PM} = A_{MM_0} = \int_{M_0}^M \vec{F} d\vec{r}$$

$M_0 \rightarrow$ РЕФ. ТАЧКА

ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕН. КОЈУ ИМА
ЧЕСТИЦА У ТАЧКИ М ЈЕДНАКА
ЈЕ РАД КОЈИ ВРШИ СИЛА ПОВРА
ВЕЉУЈУЋИ НА ЧЕСТИЦУ ПРИ
ПРЕМЕСТАЊУ У НЕКУ ДРУГУ Т.

→ ГРАВИТАЦИОНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА

$$E_p = mgy \quad [J]$$



$$\Delta A_{Q12} = - \int_{y_1}^{y_2} mg dy = -mg(y_2 - y_1) = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ОБЛИК

$$\boxed{dA = -dE_p}$$

ПРИЛИКОМ ПОМЕРАЊА ПЕНА "НАВИШЕ" РАД ГРАВ. СИЛЕ ЈЕ НЕГАТИВАН А ПОТЕНС. ЕНЕРГИЈА РАСТЕ.

↓ НА ОСНОВУ ТЕОР. О ПРОМЕНИ E_k :

$$\Delta E_k = \sum A = -\Delta E_p$$

$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1})$$

$$\boxed{E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

ЗАКОН ОДРЖАВА МЕХАНИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ:

КАДА НЕМА ДЕЈСТВА НЕКЕ НЕОТХОДОВАТИКНЕ СИЛЕ

→ ЕНЕРГИЈА СЕ ОДРЖАВА.

$$E = E_k + E_p$$

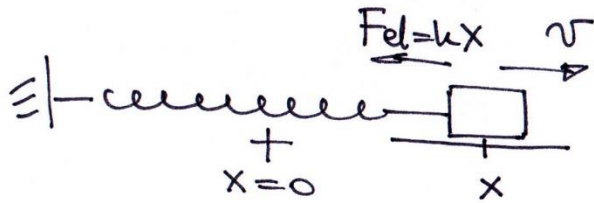
↓
УКУПНА МЕХАНИЧКА ЕНЕРГИЈА

→ НИЈЕ ОД ИНТЕРЕСА ВРЕДНОСТ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ, НЕТО ЀЕНА ПРОМЕНА
⇒ РЕФЕРЕНТНА ВРЕДНОСТ $E_p = 0$ СЕ МОЖЕ ПРОИЗВОЛЈНО ИЗАВРАТИ!!!

→ ЕЛАСТИЧНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Delta A_{el} = - \int_{x_1}^{x_2} k x dx = - \frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = - \Delta E_p$$



□ ГРАФИК ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ

ЗА КОНЗЕРВАТИВНО ФУЗ. ПОМЕ ВАНИ!

1. РАД СИЛЕ НЕ ЗАВИСИ ОД ПУТАЊЕ



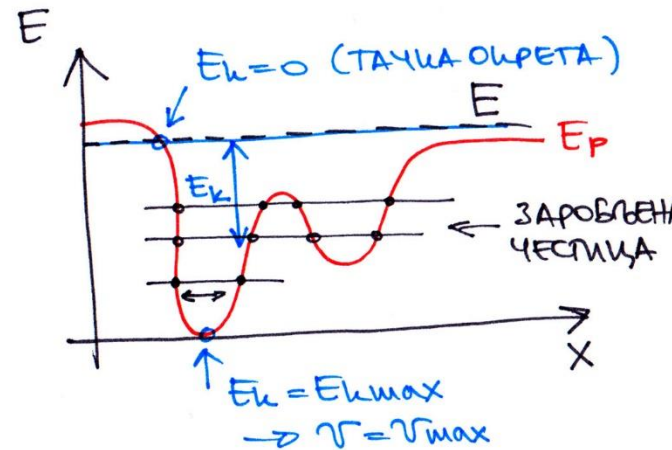
→ РАД ПО ЗАТВОРЕНОЈ ПУТАЊИ ЈЕ 0

2. $\Delta A = - \Delta E_p$

3. $E = E_k + E_p = \text{const}$

→ $dA = - dE_p = F_x dx \rightarrow F_x = - \frac{dE_p(x)}{dx}$

⇒ $\vec{F} = \left(- \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x \mid - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y \mid - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \right) = - \text{grad } E_p$



У СЛУЧАЈУ КАД ПОСТОЈЕ СЛОБОДНЕ (НЕКОНЗЕРВАТИВНЕ СИЛЕ) ЧИПНА ЕН. СЕ МЕНЈА!! (НПР. ТРЕЊЕ)

Пр.11

За тело масе m које је везано за идеалну опругу крутости k , тако да може без трења да се креће по равној хоризонталној подлози:

а) скицирати зависност потенцијалне енергије од позиције тела, ако је равнотежни положај означен са $x = 0$

б) Телу се у равнотежном положају саопшти почетна брзина v_0 . Одредити максимално истезање опруге, x_{\max} .

Пр.12

1901. Године циркус Allo "Dare Devil" Diavolo увео је тачку вожње бицикла кроз петљу. Петља је кружница полупречника 2,7 м. Колику минималну брзину треба да оствари Diavolo на свом бициклу у највишој тачки петље да би успео да заврши тачку? Шта се дешава ако је брзина мања од минималне? Ако се бициклиста посматра као материјална тачка и нема трења, одредити висину H са које је потребно да започне кретање да би успео да заврши тачку.



ДИНАМИКА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

→ МЕХАНИЧКИ СИСТЕМ:
СКУП МАТ. ТАЧАКА ИЗМЕЂУ
КОЈИХ ПОСТОЈЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ

→ КРУТО ТЕЛО ЈЕ МЕХАНИЧКИ СИСТЕМ
ЧЕСТИЦА ОД КОЈИХ ЈЕ САСТАВЉЕНО.

→ МАСА СИСТЕМА

$$M = \sum_k m_k$$

→ ГУСТИНА

$$\rho \hat{=} \frac{dm}{dV} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$m = \int_m dm = \int_V \rho dV$$

ПОВРШИНСКА
ГУСТИНА МАСЕ

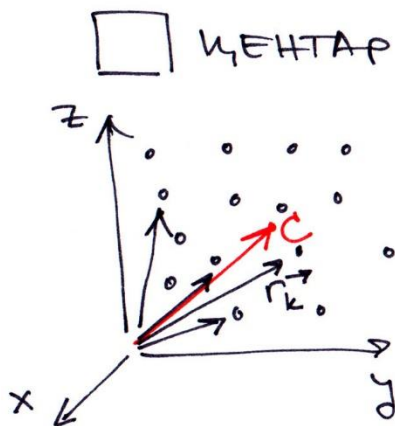
$$\rho_s = \frac{dm}{dS}$$

(ЗА ПЛОЧАСТА ТЕЛА)

ПОДЧИННА
ГУСТИНА

$$\rho_l = \frac{dm}{dl}$$

(ЗА «ЛИНИЈСКА» ТЕЛА)



□ ЦЕНТАР МАСЕ (ГЕОМЕТРИЈСКА ТАЧКА)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_k m_k \cdot \vec{r}_k}{\sum m_k} = \boxed{\frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{m} = \vec{r}_c}$$

ЗА КРУТО ТЕЛО :

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}}$$

□ ТЕОРЕМА О КРЕТАЊУ
ЦЕНТРА МАСЕ СИСТЕМА

$$\sum_k m_k \vec{a}_k = \underbrace{\sum_k \vec{F}_k^i}_{=0} + \sum_k \vec{F}_k^E$$

(З. ЊУТНОВ ЗАКОН)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum m_k \right) \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}$$

$$M \cdot \vec{a}_c = \sum m_k \cdot \vec{a}_k$$

$$\rightarrow \boxed{M \cdot \vec{a}_c = \sum_k \vec{F}_k^E}$$

ЦЕНТАР МАСЕ СЕ КРЕЊЕ
КАО ЈА ЈЕ ОН ЧЕСТИЦА
СА МАСОМ ЦЕЛОГ СИСТЕМА
ПОД ДЕЈСТВОМ СПОЊАШЊИХ
(СЕКСЕРНИХ) СИЛА

→ 1. УНУТРАШЊЕ СИЛЕ
НЕ УТИЧУ НА
КРЕТАЊЕ ЦЕНТРА
МАСЕ

2. ЗА ДЕЛО КОЈЕ
СЕ КРЕЊЕ
ТРАНСЛАТОРНО
КРЕТАЊЕ ЈЕ
ПОТпуНО
ОПИСАНО
КРЕТАЊЕМ 1
ТАЧКЕ → Ц.М.
(КАО ЈА СЕ
КРЕЊЕ
ЧЕСТИЦА)

⇒ ЗА ИЗОЛОВАНИ СИСТЕМ
 $\vec{a}_c = 0 \rightarrow \vec{v}_c = \text{const}$
РЕФ СИСТЕМ БЕЗАН ЗА Ц.М
БИ БИО ИНЕРЦИЈАЛАН (ПРОМЕН
СУПЧЕВ СИСТ.)

⇒ $\sum F_{kx}^E = 0 \rightarrow a_{cx} = 0$
→ $v_{cx} = 0 \quad !!$

ТЕОРЕМА О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА М.Т

$$\vec{P} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k \vec{p}_k = m \vec{v}_c \Rightarrow$$

ГЛАВНИ
ВЕКТОР
КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА

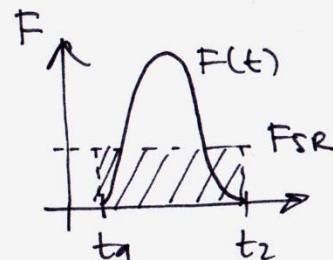
ДИФЕРЕНЦИЈА
ИЗРАЗА ЗА \vec{v}_c

Ако је $\vec{v}_c = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0$

→ ВЕКТОР УЧИНКЕ
КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА
ТЕЛА КОЈЕ ПОПУРАДИ
ОРИЈЕНТАЦИЈЕ ОДЈЕ ЈЕ \emptyset .
↑
КРОЗ С.М.

$$d\vec{P} = \sum_k \vec{F}_k^E dt$$

$$TJ. \quad \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^E dt$$



$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = F_{sr} \cdot \Delta t$$

ИМПУЛС СИЛЕ

ЗАКОН О ОУЧВАЂУ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА

$$1^\circ \quad \sum_k \vec{F}_k^E = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{const}$$

→ ИЗОЛОВАН СИСТЕМ

→ СИЛЕ ЗАТВАРАЈУ ПОЛИГОН

$$2^\circ \quad \sum_k F_{kx}^E = 0 \rightarrow P_x = \text{const}$$

(ПРОЈЕКЦИЈА РЕЗУЛТАНТНА
= 0)

: ЗАКОН О ОУЧВАЂУ
ПРОЈЕКЦИЈЕ КОЛИЧИНЕ
КРЕТАЊА

Пр.13

Аутомобил масе m креће се по палуби брода константном брзином v_r у односу на брод. Брод мирује на мирној површини воде у тренутку у ком аутомобил почне да се креће. Ако је маса брода M одредити за колико ће се померити брод кад ауто пређе растојање s дуж палубе. Отпор занемарити. Сматрати да аутомобил тренутно достигне брзину v_r .

☐ СУДАРИ

→ ПРЕТПОСТАВКА: СУДАР СЕ ОДВИЈА ТРЕЊУТНО
 ⇒ ИМПУЛСИ ЕКСТЕРНИХ СИЛА СУ НУЛА

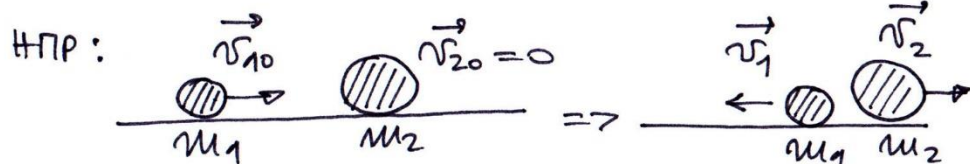
$$\Rightarrow \boxed{\sum_k \vec{p}_k = \text{const}}$$

(ЗАКОН ОДРЖАЊА ИМПУЛСА)

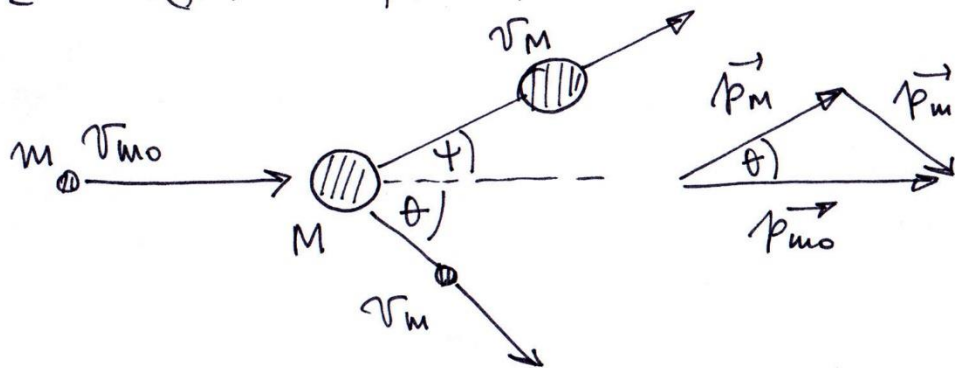
→ ЗА СВЕ СУДАРНЕ ПРОЦЕСЕ
 ВАЖИ ЗАКОН ОДРЖАЊА ЕНЕРГИЈЕ
 (НЕ САМО МЕХАНИЧКЕ, ВЕЋ И ДРУГИХ
 ВИДОВА ЕНЕРГИЈЕ)

→ а) ЕЛАСТИЧНИ $E_k = \text{const}$
 б) НЕЕЛАСТИЧНИ $E < \text{const}$

1° ЧЕОНИ СУДАР
 (СРЕТАЊЕ ПО ИСТОМ
 ПРАВИЦУ ПРЕ И ПОСЛЕ СУДАРА)



2° СУДАР СА РАШТРИЦАВАЊЕМ



3° СУДАР СА ЗАХВАТОМ

→ НАКОН СУДАРА ТЕЛА
 НАСТАВЉАЈУ ПУТ
 КАО 1 ТЕЛО

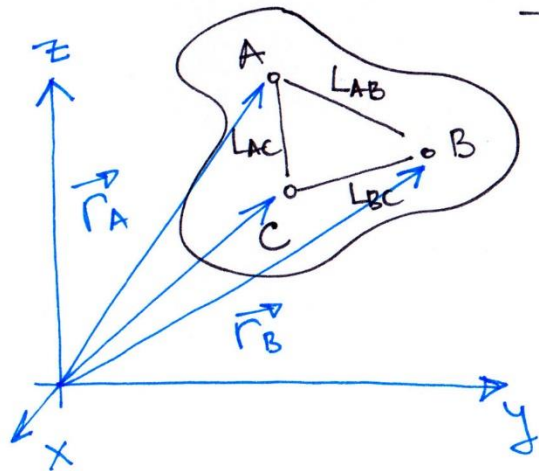
МАСА: $M + M$

БРЗИНА $v_M = v_M = v$

Пр.14

Пројектил кинетичке енергије E и масе m трпи еластичан судар са раштркавањем на мети масе $M = 2m$ која мирује пре судара. После судара кинетичка енергија пројектила је $E/3$. Наћи угао расејања θ и угао узмака мете Ψ .

ДИНАМИКА КРУТОГ ТЕЛА



→ НЕ МЕНЈА ОБЛИК И ДИМЕНЗИЈЕ ТОКОМ КРЕТАЊА

→ ПЛАНАРНО КРЕТАЊЕ (ТРАНСЛАЦИЈА + РОТАЦИЈА)

→ РОТАЦИОНО КРЕТАЊЕ : УГЛОНА БРЗИНА СВАКЕ ТАЧКЕ ОКО ПРОИЗВОЛНО ИЗАБРАНЕ ОСЕ ЈЕ КОНСТАНТНА (ω)

→ ТРАНСЛАТОРНО СВЕ ТАЧКЕ СЕ КРЕЋУ НА ИСТИ НАЧИН

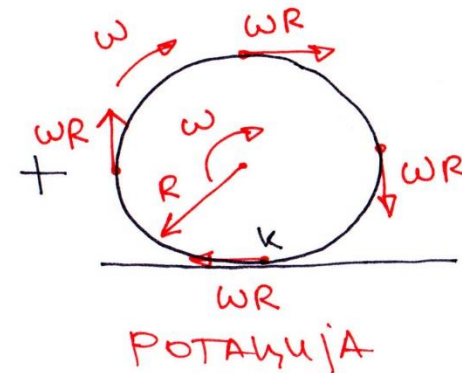
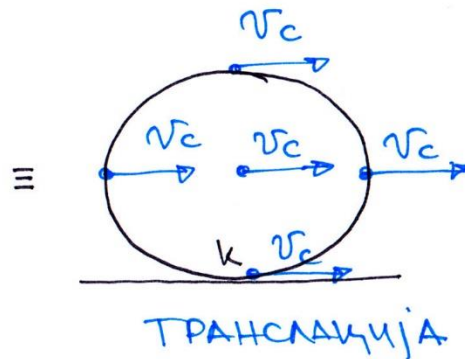
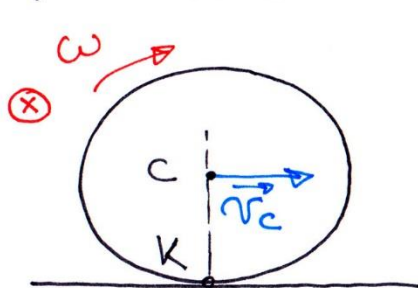


ДОВОЛНО ЈЕ ПОСМАТРАТИ САМО 1 ТАЧКУ → СМ

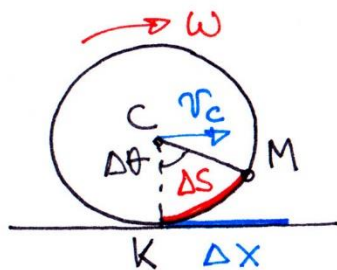
$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$$

□ КОТРЉАЊЕ ТОЧКА



□ КОТРОЉАЊЕ БЕЗ ПРОКЛИЗАВАЊА

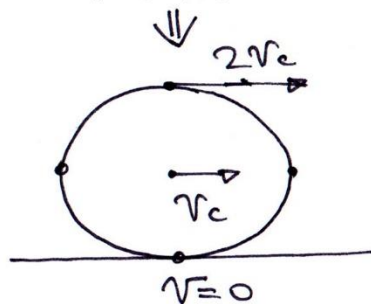


$$\Delta s = \Delta x$$

$$R \cdot \Delta\theta = \Delta x \quad / \quad d/dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{R \cdot \omega = v_c}$$

↓
ТАЧКА ДОДИРА У
ОДНОСУ НА ПОДЛОГУ
МОРА ИМАТИ РЕЛАТИВНУ
БРЗИНУ НУЛА $\Rightarrow v_k = 0$



→ ТАЧКА К СЕ
ЗОВЕ ТРЕЊУЋИ
ЦЕНТАР НУЛЕ
БРЗИНЕ РОТАЦИЈЕ

□ КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЈА РОТАЦИЈЕ

→ КРИВО ТЕЛО ПОСМАТРАМО КАО СИСТЕМ
ЕЛЕМЕНТАРНИХ МАСА

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\Gamma_k \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_k (m_k \cdot \Gamma_k^2) \right] \omega^2$$

$$\rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ I [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]

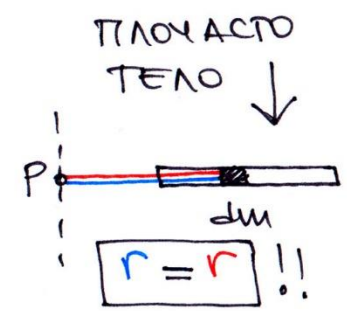
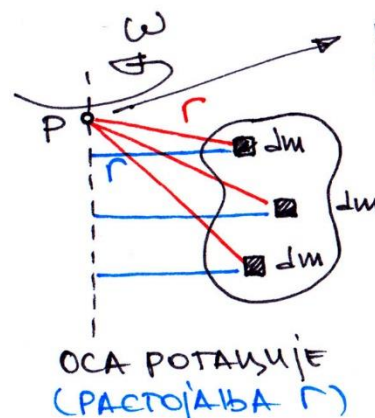
→ МЕРА ИНЕРТНОСТИ ПРИ РОТАЦИОНОМ КРЕТАЊУ →

КОЛИКА ЈЕ МАСА
И
КАКО ЈЕ
РАСПОРЕЂЕНА!

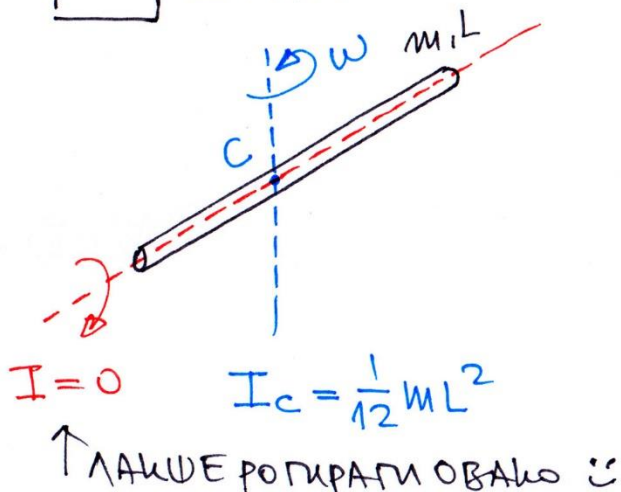
$$I = \sum_k m_k r_k^2 \quad \text{СИСТЕМ М.Т}$$

$$I = \int r^2 dm \quad \text{КРУТО ТЕЛО}$$

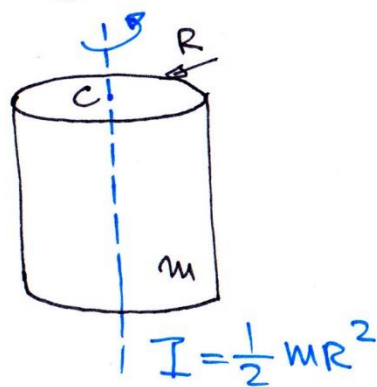
→ ВАЖНО ЈЕ ДЕФИНИСАТИ У ОДНОСУ
НА КОЈУ ОСУ РОТАЦИЈЕ ИЛИ ПОЛ
ЈЕ ОДРЕЂЕН МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ



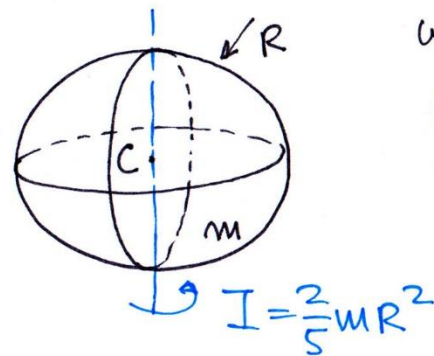
ШТАП



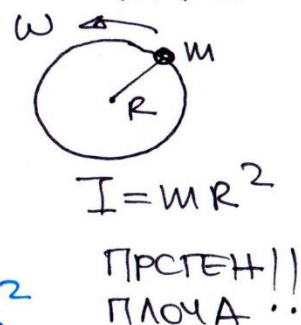
ЦИЛИНДАР (ДИСК)



КУГЛА



МАТЕР. ТАЧКА



Пр.15 Одредити укупну кинетичку енергију точка (диска) масе m и полупречника R који се по равној хоризонталној подлози котрља без проклизавања.